### - Allgemeine Informationen –

### A – Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Das Evangelische Gymnasium Meinerzhagen ist das einzige Gymnasium der Stadt Meinerzhagen. Es liegt nahe der Innenstadt und hat eine entsprechend heterogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Das Evangelische Gymnasium Meinerzhagen ist in der Sekundarstufe I vierzügig und wird als Halbtagsgymnasium geführt.

In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig etwa 25 Schülerinnen und Schüler neu aufgenommen, überwiegend aus zwei umliegenden Realschulen der Stadt, und in M, D und E auf die parallelen Kurse gleichmäßig verteilt.

In der Regel werden in der Einführungsphase sechs parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Q-Phase zwei Leistungs- und vier Grundkurse entwickeln.

Der Unterricht findet im 60-Minuten-Takt statt.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben im Fach Mathematik angehalten und, wo erforderlich, begleitet. Der Känguru-Wettbewerb ist für die Jahrgangsstufen 5 und 6 obligatorisch.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass wo immer möglich mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden.

In der Sekundarstufe II kann verlässlich darauf aufgebaut werden, dass die Verwendung von Kontexten im Mathematikunterricht bekannt ist.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 (derzeit TI-30X Pro Multiview) verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule drei PC-Unterrichtsräume zur Verfügung. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Der grafikfähige Taschenrechner (TI-nspire cx ohne CAS) wird in der Einführungsphase eingeführt.

**B – Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung**

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOSt sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

*Verbindliche Instrumente:*

*Überprüfung der schriftlichen Leistung*

* **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Halbjahr, davon eine (in der Regel die vierte Klausur in der Einführungsphase) als landeseinheitlich zentral gestellte Klausur. Dauer der Klausuren: 90 Minuten. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (1) und VV 14.1.)
* **Grundkurse Q-Phase Q 1.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 120 Minuten (die Fachkonferenz hat beschlossen, hier die obere Grenze der Bandbreite für Q1 und Q2 zu nutzen). (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.12)
* **Grundkurse Q-Phase Q 1.2 – Q2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 135 Minuten (die Fachkonferenz hat beschlossen, hier die obere Grenze der Bandbreite für Q1 und Q2 zu nutzen). (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.12)
* **Grundkurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen für Schülerinnen und Schüler, die Mathematik als 3. Abiturfach gewählt haben. Dauer der Klausur: 180 Minuten. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
* **Leistungskurse Q-Phase Q 1.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 135 Minuten (die Fachkonferenz hat beschlossen, in allen Klausuren dieser Kurshalbjahre einheitlich zu verfahren). (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
* **Leistungskurse Q-Phase Q 1.2:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 180 Minuten (die Fachkonferenz hat beschlossen, in allen Klausuren dieser Kurshalbjahre einheitlich zu verfahren). (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
* **Leistungskurse Q-Phase Q 2.1:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 200 Minuten (die Fachkonferenz hat beschlossen, in allen Klausuren dieser Kurshalbjahre einheitlich zu verfahren). (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
* **Leistungskurse Q-Phase Q 2.2:** Eine Klausur unter Abiturbedingungen (die Fachkonferenz hat beschlossen, die letzte Klausur vor den Abiturklausuren unter Abiturbedingungen bzgl. Dauer und inhaltlicher Gestaltung zu stellen). Dauer der Klausur: 255Minuten. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (2) und VV 14.2.)
* **Facharbeit:** Gemäß Beschluss der Lehrerkonferenz wird die erste Klausur Q2 für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, durch diese ersetzt. (Vgl. APO-GOSt B § 14 (3) und VV 14.3.)

*Übergeordnete Kriterien:*

Die Bewertungskriterien für eine Leistung müssen den Schülerinnen und Schülern transparent und klar sein. Die Fachkonferenz legt allgemeine Kriterien fest, die sowohl für die schriftlichen als auch für die sonstigen Formen der Leistungsüberprüfung gelten. Dazu gehört auch die Darstellung der Erwartungen für eine gute und für eine ausreichende Leistung.

*Konkretisierte Kriterien:*

* *Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung*

Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren erfolgt über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind. Dabei sind in der Qualifikationsphase alle Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet. Die Zuordnung der Hilfspunktsumme zu den Notenstufen orientiert sich in der Einführungsphase an der zentralen Klausur und in der Qualifikationsphase am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend soll bei Erreichen von ca. 50% der Hilfspunkte erteilt werden. Von den genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden, wenn sich z. B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Hilfspunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizontes abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung (APO-GOSt §13 (2)) angemessen erscheint.

|  |
| --- |
| **Maßstab für die schriftlichen Leistungsbewertungen** |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | Notenpunkte |
| kleiner | 20% | 27% | 33% | 40% | 45% | 50% | 55% | 60% | 65% | 70% | 75% | 80% | 85% | 90% | 95% | nötige Prozent |

* *Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen*

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils von einer sehr guten bis zu einer mangelhaften Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schülerin bzw. des Schülers zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht.

Die Kriterien sind für alle Schüler und Eltern transparent und können unter der URL

<http://www.ev-g-m.de/tl_files/Fachbereiche/Mathematik/Sonstige%20Mitarbeit%20im%20Fach%20Mathematik.pdf> eingesehen werden.



*Grundsätze der Leistungsrückmeldung und Beratung:*

* Die Fachkonferenz legt in Abstimmung mit der Schulkonferenz und unter Berücksichtigung von § 48 SchulG und §13 APO-GOSt fest, zu welchen Zeitpunkten und in welcher Form Leistungsrückmeldungen und eine Beratung im Sinne individueller Lern- und Förderempfehlungen erfolgen.

**C – Qualitätssicherung und Evaluation**

Das schulinterne Curriculum stellt keine starre Größe dar, sondern ist als „lebendes Dokument“ zu betrachten. Dementsprechend sind die Inhalte stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachkonferenz (als professionelle Lerngemeinschaft) trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.

Durch parallele Klausuren (vgl. 2.3) in den Grundkursen, durch Diskussion der Aufgabenstellung von Klausuren in Fachdienstbesprechungen und eine regelmäßige Erörterung der Ergebnisse von Leistungsüberprüfungen wird ein hohes Maß an fachlicher Qualitätssicherung erreicht.

Das schulinterne Curriculum (siehe 2.1) ist zunächst bis 2017 für den ersten Durchgang durch die gymnasiale Oberstufe nach Erlass des Kernlehrplanes verbindlich. Jeweils vor Beginn eines neuen Schuljahres, d.h. erstmalig nach Ende der Einführungsphase im Sommer 2015 werden in einer Sitzung der Fachkonferenz für die nachfolgenden Jahrgänge zwingend erforderlich erscheinende Veränderungen diskutiert und ggf. beschlossen, um erkannten ungünstigen Entscheidungen schnellstmöglich entgegenwirken zu können.

Nach Abschluss des Abiturs 2017 wird eine Arbeitsgruppe aus den zu diesem Zeitpunkt in der gymnasialen Oberstufe unterrichtenden Lehrkräften auf der Grundlage ihrer Unterrichtserfahrungen eine Gesamtsicht des schulinternen Curriculums vornehmen und eine Beschlussvorlage für die erste Fachkonferenz des folgenden Schuljahres erstellen.

**D – Schulinterner Lehrplan der Einführungsphase**

### D.1 – Unterrichtsvorhaben EF

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema**:  | **Zentrale Kompetenzen:** | **Inhaltsfeld** u. **Inhaltlicher Schwerpunkt**: | **Min. Zeitbedarf**:  |
| *0 Grundlegende Einführung des GTR**Vertiefende Bedienung GTR* | Werkzeuge nutzen |  | 3 Std7 Std (themenbezogen) |
| *I Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext*  | ModellierenWerkzeuge nutzen | Funktionen und Analysis (A)Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen  | 13 Std. |
| *II Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate* | ArgumentierenWerkzeuge nutzen | Funktionen und Analysis (A)Grundverständnis des Ableitungsbegriffs  | 9 Std |
| *III Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen*  | ProblemlösenArgumentierenWerkzeuge nutzen | Funktionen und Analysis (A)Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen  | 9 Std |
| *IV Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen* | ProblemlösenArgumentieren | Funktionen und Analysis (A)Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen  | 7 Std |
| *V Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen* | ModellierenWerkzeuge nutzen | Stochastik (S)Mehrstufige Zufallsexperimente  | 7 Std |
| *VI Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten* | ModellierenKommunizieren | Stochastik (S)Bedingte Wahrscheinlichkeiten  | 7 Std |
| *VII Koordinatisierungen des Raumes* | ModellierenKommunizieren | Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)Koordinatisierungen des Raumes  | 4 Std |
| *VIII Vektoroperationen* | Problemlösen | Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)Vektoren und Vektoroperationen  | 7 Std |
|  |  |  | 73 Std |

**D.2 – Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben und verbindliche Absprachen für die EF**

|  |
| --- |
| ***Thema:*** *Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * beschreiben die Eigenschaften (Symmetrie, Nullstellen, Grenzwertverhalten) von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationalen Funktionen sowie quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen
* lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel
* beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen
* wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung*(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** nutzen Tabellenkalkulation und grafikfähige Taschenrechner
* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge (GTR, geogebra) zum… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
 | Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software und des GTR gerichtet werden. Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt. Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote Rechnung getragen. (Vertiefungskurs)Ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer qualitativen Erkundung mit dem GTR, wobei Parameter gezielt variiert werden. Bei der Klassifizierung der Formen können die Begriffe aus Unterrichtsvorhaben II eingesetzt werden. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert. Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben.Als Kontext für die Beschäftigung mit Wachstumsprozessen können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden. Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (z. B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht. *Der entdeckende Einstieg in Transformationen kann etwa über das Beispiel „Sonnenscheindauer“ aus den GTR-Materialien erfolgen, (*Sinusfunktion). Anknüpfend an die Erfahrungen aus der SI werden dann quadratische Funktionen (Scheitelpunktform) und Parabeln unter dem Transformations­aspekt betrachtet. Systematisches Erkunden mithilfe des GTR (und geogebra) eröffnet den Zugang zu Potenzfunktionen. |

|  |
| --- |
| **Thema:** *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * berechnen durchschnittliche Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext
* erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate
* deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten
* lernen exemplarisch die h-Methode kennen
* deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung
* beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion)
* leiten Funktionen graphisch ab
* begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):*****Argumentieren (Vermuten)****Die Schülerinnen und Schüler** stellen Vermutungen auf
* unterstützen Vermutungen beispielgebunden
* präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … grafischen Messen von Steigungen
* nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
 | Für den Einstieg können Themen wie z. B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Aktienkurse, Entwicklung regenerativer Energien, Sonntagsfrage, Wirk- oder Schadstoffkonzentration, Wachstum, Kosten- und Ertragsentwicklung betrachtet werden.Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate kann die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt werden. Tabellenkalkulation und Dynamische-Geometrie-Software sollten zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) eingesetzt.Die h-Methode wird exemplarisch an der Funktion f(x)=x² mit den Schülerinnen und Schülern hergeleitet.Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schüler den GTR und die Möglichkeit, Werte der Ableitungsfunktionen näherungsweise zu tabellieren und zu plotten. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Vermutens.Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier ist auch der Ort, den Begriff des Extrempunktes (lokal vs. global) zu präzisieren und dabei auch Sonderfälle, wie eine konstante Funktion, zu betrachten. |

|  |
| --- |
| **Thema:** *Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate
* beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion)
* leiten Funktionen graphisch ab
* begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
* nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
* wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):*****Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
* erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
* wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*

***Argumentieren****Die Schülerinnen und Schüler** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Lösen von Gleichungen… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
 | Kontexte spielen in diesem Unterrichtsvorhaben eine untergeordnete Rolle. Quadratische Funktionen können aber stets als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet werden. Die Motivation zur Beschäftigung mit Polynomfunktionen kann durch eine Optimierungsaufgabe geweckt werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Schachtel aus einem DIN-A4-Blatt herzustellen, führen insbesondere auf Polynomfunktionen vom Grad 3. Hier können sich alle bislang erarbeiteten Regeln bewähren.Durch gleichzeitiges Visualisieren der Ableitungsfunktion erklären Lernende die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen 3. Grades durch die Eigenschaften der ihnen vertrauten quadratischen Funktionen. Zugleich entdecken sie die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten, woran in Unterrichtsvorhaben IV angeknüpft wird. |

|  |
| --- |
| **Thema:** *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen*  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * leiten Funktionen graphisch ab
* nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion
* begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
* nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten
* wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an
* verwenden das notwendige Kriterium und das hinreichende Kriterium (Vorzeichenwechsel und 2. Ableitung) zur Bestimmung von Extrempunkten
* unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich
* verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):*****Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) *(Lösen)*
* wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*

***Argumentieren****Die Schülerinnen und Schüler** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
* berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen […]) *(Begründen)*
* erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)*
 | Ein kurzes Wiederaufgreifen des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinusfunktion führt zur Entdeckung, dass die Kosinusfunktion deren Ableitung ist.Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt.Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.Das hinreichende Kriterium der 2. Ableitung für Extrema wird mit Hilfe der Exkursion in Kapitel 4 (LS EF) eingeführt.Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden.  |

|  |
| --- |
| **Thema:** *Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente
* simulieren Zufallsexperimente
* verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen
* stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch
* beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexere Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Generieren von Zufallszahlen… Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen… Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen… Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert)
 | Beim Einstieg ist eine Beschränkung auf Beispiele aus dem Bereich Glücksspiele zu vermeiden. Zur Modellierung von Wirklichkeit werden Simulationen – auch unter Verwendung von digitalen Werkzeugen (GTR, Tabellenkalkulation) – geplant und durchgeführt (Zufallsgenerator).Innerhalb der Betrachtung des Urnenmodells sollte auch das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge thematisiert werden.Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert werden im Kontext von Glücksspielen erarbeitet und können durch zunehmende Komplexität der Spielsituationen vertieft werden. Digitale Werkzeuge werden zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung von händischem Rechnen verwendet. |

|  |
| --- |
| **Thema:** *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier-oder Mehrfeldertafeln
* bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten
* prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit
* bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten.

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler* * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

Kommunizieren*Die Schülerinnen und Schüler** erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten […] *(Rezipieren)*
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
 | Zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes sollte ein Kontext stehen, der eine Möglichkeit zur Vertiefung bietet. (z.B. HIV-Test) Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden. Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden parallel Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten verwendet. Die Schülerinnen und Schüler sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekannte Astwahrscheinlichkeiten nutzen können. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs P(A∩B) von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. |
| **Thema:** *Koordinatisierungen des Raumes* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
* stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (S*trukturieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*)

***Kommunizieren (Produzieren)****Die Schülerinnen und Schüler** wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen
 | An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z. B. „unvollständigen“ Holzquadern) lernen die Schülerinnen und Schüler, ohne Verwendung einer DGS zwischen (verschiedenen) Schrägbildern einerseits und der Kombination aus Grund-, Auf- und Seitenriss andererseits zu wechseln, um ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln. |

|  |
| --- |
| **Thema:** *Vektoroperationen* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren
* stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar
* berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras
* addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf lineare Abhängigkeit
* weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach

**Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Problemlösen*Die Schülerinnen und Schüler** entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)*
* wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*
 | Neben anderen Kontexten kann hier auf die Kenntnisse aus dem Physikunterricht der SI als Beispiel für vektorielle Größen (Kräfteaddition) zurückgegriffen werden.Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen werden einfache geometrische Problemstellungen gelöst: Beschreibung von Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), Auffinden von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), Untersuchung auf Parallelität. |

**E – Schulinterner Lehrplan der Qualifikationsphase im Grundkurs**

### E.1 – Unterrichtsvorhaben Q1/Q2 (GRUNDKURS)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema**:  | **Zentrale Kompetenzen:** | **Inhaltsfelder,** i**nhaltliche Schwerpunkte,****Inhalte im LS** | **Min. Zeitbedarf** in Std. |
| **I Optimierungsprobleme** | ModellierenProblemlösen | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Funktionen als mathematische Modelle**Inhalte im LS:** Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen***(🡪 LS Kap. I.5)*** | 7  |
| **II Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen** | ModellierenWerkzeuge nutzen(Argumentieren) | **Inhaltsfelder**: Funktionen und Analysis (A), Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Funktionen als mathematische Modelle, Lineare Gleichungssysteme**Inhalte im LS:** Steckbriefaufgaben, Bedeutung der zweiten Ableitung, Kriterien für Extrem- und Wendestellen, Funktionenscharen, Gauß-Verfahren***(🡪 LS Kap. I.2 – I.4 ; I.6 – I.8 ; VI.1)*** | 15 |
| **III Von der Änderungsrate zum Bestand** | KommunizierenArgumentieren | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Grundverständnis des Integralbegriffs**Inhalte im LS:** Rekonstruktion einer Größe, Integral***(🡪 LS Kap. II.1 – II.2)*** | 7 |
| **IV Von der Randfunktion zur Integralfunktion** | ArgumentierenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Integralrechnung**Inhalte im LS:** Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen, Integral und Flächeninhalt***(🡪 LS Kap. II.3 – II.5)*** | 9 |
| **V Natürlich: Exponentialfunktionen** | ProblemlösenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Fortführung der Differenzialrechnung**Inhalte im LS:** Wiederholung Exponentialfunktionen, natürliche Logarithmus, Ableitung von Exponentialfunktionen, natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung***(🡪 LS Kap. III.1 – III.3)*** | 7 |
| **VI Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen** | Modellieren | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Fortführung der Differenzialrechnung, Integralrechnung**Inhalte im LS:** Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang, zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung, Produktregel, Kettenregel, Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (auch im Sachzusammenhang)***(🡪 LS Kap. III.4 ; IV.1 – IV.5)*** | 9 |
| **70 54 STD.** |
| **VII Eine „Gerade“ Sache: Beschreibung von Bewegungen und Vermessungen im Raum**  | ModellierenWerkzeuge nutzenArgumentierenKommunizierenProblemlösen | **Inhaltsfeld**: Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden), Lagebeziehungen, Skalarprodukt**Inhalte im LS:** Geraden, gegenseitige Lage von Geraden, Winkel zwischen Vektoren (Skalarprodukt)***(🡪 LS Kap. V.2 – V.5)*** | 18 |
| ***Ende Q1.2 (vor DP) – ca. 70 Unterrichtsstunden*** |
| **VIII Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung geometrischer Probleme** | ProblemlösenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld**: Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen), Lineare Gleichungssysteme**Inhalte im LS:** Ebenen im Raum (Parameterform), Lagebeziehungen von Ebnen und Geraden, Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, Geometrische Objekte und Situationen im Raum***(🡪 LS Kap. VI.2 – VI.5)*** | 7 |
| **25 STD.** |
| **IX Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen** | Modellieren | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen**Inhalte im LS:** Darstellung von Daten und Beschreibung von Kenngrößen, Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen***(🡪 LS Kap. VIII.1 – VIII.2)*** | 6 |
| **X Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Modellieren mit der Binominalverteilung** | ModellierenWerkzeuge nutzenArgumentieren | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Binominalverteilung**Inhalte im LS:** Bernoulli-Experimente, Binominalverteilung (Praxis und Problemlösen), von der Stichprobe zur Grundgesamtheit***(🡪 LS Kap. VIII.3 – VIII.5, Wahlthema)*** | 14 |
| **XI Von Übergängen und Prozessen** | ModellierenArgumentieren | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Stochastische Prozesse**Inhalte im LS:** Stochastische Prozesse, Übergangsmatrizen, Matrixmultiplikation, Grenzverhalten (Entwicklung auf lange Sicht)***(🡪 LS Kap. X.1 – VIII.4)*** | 7 |
| **38 27 STD.** |
| ***Ende Q2.1 (nach Halbjahreszeugnissen, ca. 8 Wochen vor den Osterferien) – ca. 38 Unterrichtsstunden*** |
| **WIEDERHOLUNG UND ABITURVORBEREITUNG** | 16 |

**B – Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben und verbindliche Absprachen in der Q1/Q2 (GRUNDKURS)**

|  |
| --- |
| **Thema I: *Optimierungsprobleme*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler** führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
* verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler** treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor.(Strukturieren)
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)

Problemlösen*Die Schülerinnen und Schüler** finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden)
* wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …) (Lösen)
* setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (Lösen)
* berücksichtigen einschränkende Bedingungen (Lösen)
* führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
* vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)
 | **Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“***Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.*An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht.*Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „ schnellsten Weg “.*Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung). |

|  |
| --- |
| **Thema II: *Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler** bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“)
* beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
* verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
* beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
* wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
* treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge (GTR) zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
* nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge (GTR) zum Erkunden , Berechnen und Darstellen
 | **Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“**Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt.Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden.Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt.Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet.Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z. B. Lerntheke, Expertenpuzzle, Museumsrundgang, …) an.Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei oder vier Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen. Hierbei bietet sich an, die Matrixschreibweise einzuführen.Im Anschluss (optional) können Funktionenscharen näher betrachtet werden. Eine „klassische Kurvenuntersuchung“ scheint hier geeignet um charakteristische Punkte unter der Abhängigkeit von Parametern zu untersuchen. |

|  |
| --- |
| **Thema III: *Von der Änderungsrate zum Bestand*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler** interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
* deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
* skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Kommunizieren*Die Schülerinnen und Schüler** erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (Rezipieren)
* formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (Produzieren)
* wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus (Produzieren)
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)
* dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (Produzieren)
* erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)
 | Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).*Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. (🡪 Material auf QUA-LiS NRW)*Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.Das Stationenlernen wird in einem Portfolio dokumentiert.Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert. |

|  |
| --- |
| **Thema IV: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler** erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
* erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
* nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
* bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
* bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
* ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrat
* bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Argumentieren*Die Schülerinnen und Schüler** stellen Vermutungen auf (Vermuten)
* unterstützen Vermutungen beispielgebunden (Vermuten)
* präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen)

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler** nutzen […] digitale Werkzeuge [z.B. Tabellenkalkulation, Funktionenplotter, GTR] zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
* Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
* Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
* Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals
 | Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (🡪 vgl. Thema III) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist.Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen.Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag).Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. (z. B. durch ein sog. Funktionendomino).In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen. |

|  |
| --- |
| **Thema V: *Natürlich: Exponentialfunktionen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
* untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
* interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang
* bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: natürliche Funktionen

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Problemlösen*Die Schülerinnen und Schüler* * erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden)
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) (Lösen)
* führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
* variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren).

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* * Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
	+ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
	+ grafischen Messen von Steigungen
* entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
* nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
 | *Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase sowie in der Jahrgangsstufe 9 erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall).*Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet.Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder in der Grafik ihres GTR experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.  |
| **Thema VI: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
* interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext
* bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
	+ Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten
* bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung)
* wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an
* wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an
* bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
* ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)
 | Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert. |

|  |
| --- |
| **Thema VII: *Eine „Gerade“ Sache: Beschreibung von Bewegungen und Vermessungen im Raum*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler** stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar
* interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
* untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden […]
* deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es
* untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
* treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler** nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden, Darstellen von Objekten im Raum

Argumentieren*Die Schülerinnen und Schüler** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (Begründen)
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
* berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen)
* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)

Kommunizieren*Die Schülerinnen und Schüler** erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren)
* verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren)
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)
* erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)
* vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)

Problemlösen*Die Schülerinnen und Schüler** erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden)
* analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden)
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen)
* wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen)
* beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren)
 | Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an die Einführungsphase an.Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Eine analoge Bearbeitung der erarbeiteten Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an.Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden. Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden.Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden.Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an die EF) wieder aufgenommen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. |

|  |
| --- |
| **Thema VIII: *Lineare Algebra als Schlüssel von geometrischen Problemen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * stellen Ebenen in Parameterform dar
* untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen
* berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
* stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
* beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
* interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Problemlösen*Die Schülerinnen und Schüler** wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
* wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (Lösen)
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen)
* führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
* vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)
* beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren)
* analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (Reflektieren)

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
	+ Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 | Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus der EF wieder aufgegriffen. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen).Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden. |

|  |
| --- |
| **Thema IX: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben
* erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen
* bestimmen den Erwartungswert µ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren
 | Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert.Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert.Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeits­verteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. |

|  |
| --- |
| **Thema X: *Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Modellieren mit der Binominalverteilung*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufalls­experimente
* erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
* beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
* bestimmen den Erwartungswert µ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […]
* nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen
* schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
* treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung (Validieren)
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)

Werkzeuge nutzen*Die Schülerinnen und Schüler** nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
	+ Generieren von Zufallszahlen
	+ Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
	+ Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
	+ Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
	+ Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)

Argumentieren*Die Schülerinnen und Schüler** stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
* verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*
 | Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen.*Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt:- die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment- die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette- die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße- die Unabhängigkeit der Ergebnisse- die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p*Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden. *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.* |

|  |
| --- |
| **Thema XI: *Von Übergängen und Prozessen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen
* verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)

**Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren*Die Schülerinnen und Schüler* * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

Argumentieren*Die Schülerinnen und Schüler* * präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen)
* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)
 | *Hinweis:* *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.*Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln.Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. |

### F.1 – Unterrichtsvorhaben Q1/Q2 (LEISTUNGSKURS)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Thema**:  | **Zentrale Kompetenzen:** | **Inhaltsfelder,** i**nhaltliche Schwerpunkte,****Inhalte im LS** | **Quartal / ca. Zeitbedarf** in Std. |
| **I Optimierungsprobleme** | ModellierenProblemlösen | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Funktionen als mathematische Modelle, Fortführung der Differentialrechnung**Inhalte im LS:** Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen*(🡪 LS Kap. I.5)* | Q1/110  |
| **II Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen** | ModellierenWerkzeuge nutzen(Argumentieren) | **Inhaltsfelder**: Funktionen und Analysis (A), Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Funktionen als mathematische Modelle, Lineare Gleichungssysteme**Inhalte im LS:** Steckbriefaufgaben, Bedeutung der zweiten Ableitung, Kriterien für Extrem- und Wendestellen, Funktionenscharen, Gauß-Verfahren*(🡪 LS Kap. I.2 – I.4 ; I.6 – I.8 ; VI.1)* | Q1/118 |
| **III Von der Änderungsrate zum Bestand** | KommunizierenArgumentieren | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Grundverständnis des Integralbegriffs**Inhalte im LS:** Rekonstruktion einer Größe, Integral*(🡪 LS Kap. II.1 – II.2)* | Q1/18 |
| **IV Von der Randfunktion zur Integralfunktion** | ArgumentierenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Integralrechnung**Inhalte im LS:** Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen, Integral und Flächeninhalt, Integralfunktionen, uneigentliche Integrale*(🡪 LS Kap. II.3 – II.7)* | Q1/120 |
| **V Natürlich: Exponentialfunktionen** | ProblemlösenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Fortführung der Differenzialrechnung**Inhalte im LS:** Wiederholung Exponentialfunktionen, natürliche Logarithmus, Ableitung von Exponentialfunktionen, natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung*(🡪 LS Kap. III.1 – III.3)* | Q1/110 |
| **VI Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen** | Modellieren | **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Fortführung der Differenzialrechnung, Integralrechnung**Inhalte im LS:** Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang, zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung, Produktregel, Kettenregel, Untersuchung zusammengesetzter Exponential- und Logarithmus Funktionen (auch im Sachzusammenhang), Integration durch Substitution, Partielle Integration, Koeffizientenvergleich*(🡪 LS Kap. III.4 ; IV.1 – IV.6; Wahlthema Integrationsverfahren)* | Q1/225 |
| **91 Std** |
| **VII Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden** | ModellierenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld**: Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden), Lagebeziehungen**Inhalte im LS:** Geraden, gegenseitige Lage von Geraden*(🡪 LS Kap. V.2 – V.3)* | Q1/28 |
| **VIII Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen** | Problemlösen | **Inhaltsfeld:** Lineare Algebra (G)**Inhaltlicher Schwerpunkt:** Skalarprodukt**Inhalte im LS:** Skalarprodukt, Orthogonalität, Winkel zwischen Vektoren und Geraden*(🡪 LS Kap. V.4 – V.5)* | Q1/210 |
| **IX Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter** | ArgumentierenKommunizieren | **Inhaltsfeld**: Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte**: Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) **Inhalte im LS:** Ebenen im Raum (Parameterform), Lagebeziehungen von Ebenen und Geraden, Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, *(🡪 LS Kap. VI.2 – VI.3)* | Q1/215 |
| **X Lagebeziehungen und Abstandsprobleme – Untersuchungen an Polyedern** | ArgumentierenKommunizierenProblemlösenWerkzeuge nutzen | **Inhaltsfeld:** Lineare Algebra (G)**Inhaltlicher Schwerpunkt:** Lagebeziehungen und Abstände**Inhalte im LS:** Lagebeziehungen von Ebenen und Geraden; Geometrische Objekte und Situationen im Raum, Abstände und Winkel (Punkte, Geraden und Ebenen)*(🡪 LS Kap. VI.4 – V.5; VII. 1-6)* | Q1/220 |
| **XI Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben** | ModellierenProblemlösen | **Inhaltsfeld:** Lineare Algebra (G)**Inhaltlicher Schwerpunkt:** Verknüpfung aller Kompetenzen**Inhalte im LS:** Abiturvorbereitung*(🡪 LS Abiturvorbereitung)* | Q1/210 |
| **63 STD.**  |
| **XII Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen** | Modellieren | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen**Inhalte im LS:** Darstellung von Daten und Beschreibung von Kenngrößen, Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen*(🡪 LS Kap. VIII.1 – VIII.2)* | Q2/18 |
| **XIII Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Modellieren mit der Binominalverteilung** | ModellierenWerkzeuge nutzenProblemlösen | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Binominalverteilung**Inhalte im LS:** Bernoulli-Experimente, Binominalverteilung (Praxis und Problemlösen)*(🡪 LS Kap. VIII.3 – VIII.5)* | Q2/120 |
| **XIV Ist die Glocke normal?** | ModellierenWerkzeuge nutzenProblemlösen | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Normalverteilung**Inhalte im LS:** Stetige Zufallsgrößen, Die Analysis der Gauß-Funktion, Normalverteilung*(🡪 LS Kap. IX.1 - 3)* | Q2/120 |
| **XV Signifikant oder Relevant? – Testen von Hypothesen** | ModellierenKommunizieren | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Testen von Hypothesen**Inhalte im LS:** Zweiseitiger Signifikanztest, Einseitiger Signifikanztest, Fehler beim Testen, Ergebnisse kritisch hinterfragen, Testen bei der Normalverteilung*(🡪 LS Kap. VIII.6 -9; Kap. IX Wahlthema)* | Q2/115 |
| **XVI Von Übergängen und Prozessen** | ModellierenArgumentieren | **Inhaltsfeld**: Stochastik (S)**Inhaltlicher Schwerpunkt**: Stochastische Prozesse**Inhalte im LS:** Stochastische Prozesse, Übergangsmatrizen, Matrixmultiplikation, Grenzverhalten (Entwicklung auf lange Sicht)*(🡪 LS Kap. X.1 – VIII.4)* | Q2/115 |
| **78 STD.** |
| **WIEDERHOLUNG UND ABITURVORBEREITUNGIntegrierende Wiederholung Analysis, Lineare Algebra und Stochastik** | Q2/2 36 |

**F.2 – Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben und verbindliche Absprachen in der Q1/Q2 (LEISTUNGSKURS)**

|  |
| --- |
| ***Thema I: Optimierungsprobleme*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * führen **Extremalprobleme** durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
* verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von **Extrem- und Wendepunkten**
* bilden die Ableitungen weiterer Funktionen
	+ **Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten**
* führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück
* wenden die **Produkt- und Kettenregel** zum Ableiten von Funktionen an

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

***Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)*
* wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern …) *(Lösen)*
* setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)*
* berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)*

vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* | **Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“**Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln.An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht.Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).Im Zusammenhang mit geometrischen und ökonomischen Kontexten entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Wurzelfunktionen sowie die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an. |

|  |
| --- |
| **Thema II: *Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * interpretieren **Parameter** von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von **Funktionenscharen**
* bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („**Steckbriefaufgaben**“)
* beschreiben das **Krümmungsverhalten** des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
* verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur **Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten**
* beschreiben den **Gauß-Algorithmus** als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
* wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
* nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen
 | **Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“**Anknüpfend an die Einführungsphase werden in unterschiedlichen Kontexten (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden.Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig über die Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen. |

|  |
| --- |
| **Thema III: *Von der Änderungsrate zum Bestand*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * entdecken die Bedeutungen von **Ober- und Untersummen**
* interpretieren **Produktsummen** im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
* deuten die Inhalte von **orientierten Flächen im Kontext**
* skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige **Flächeninhaltsfunktion**

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Kommunizieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)*
* formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
* wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)*
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
* dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)*

erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* | *Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau. Deshalb hat sich die Fachkonferenz für einen ähnlichen Einstieg in die Integralrechnung im Leistungskurs entschieden wie im Grundkurs. Er unterscheidet sich allenfalls durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs.*Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt werden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit - Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Konstruktion einer Größe (z. B. physikalische Arbeit) erforderlich, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. |

|  |
| --- |
| **Thema IV: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den **Übergang von der Produktsumme zum Integral** auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
* erläutern den Zshg zwischen **Änderungsrate** und **Integralfunktion**
* deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen
* nutzen die **Intervalladditivität** und **Linearität** von Integralen
* begründen den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs
* bestimmen **Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen**
* bestimmen Integrale numerisch […]
* ermitteln den **Gesamtbestand** oder **Gesamteffekt** einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
* bestimmen **Flächeninhalte** und **Volumina von Körpern**

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Argumentieren****Die Schülerinnen und Schüler** unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)*
* präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*
* verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*
* erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen)*

***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* * nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum …… Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und  Abszisse… Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals
 | Schülerinnen und Schüler sollen hier selbst entdecken, dass die Integralfunktion Ja eine Stammfunktion der Randfunktion ist. Dazu wird das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung). Die Graphen der Randfunktion und der genäherten Integralfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Um diesen Zusammenhang zu begründen, wird der absolute Zuwachs Ja(x+h) – Ja(x) geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren.Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung:Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden.Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird mit einem „Eierschneider“ der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zerlegt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.)Mit der *Mittelwertberechnung* kann bei entsprechend zur Verfügung stehender Zeit (über den Kernlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden. Hier bieten sich Vernetzungen mit dem Inhaltsfeld Stochastik an. |

|  |
| --- |
| ***Thema V: Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * beschreiben die **Eigenschaften von Exponentialfunktionen** und begründen die besondere Eigenschaft der **natürlichen Exponentialfunk­tion**
* nutzen die **natürliche Logarithmusfunktion** als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion
* bilden die **Ableitungen** weiterer Funktionen:
	+ natürliche Exponentialfunktion
	+ Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis
	+ natürliche Logarithmusfunktion
* nutzen die natürliche **Logarithmusfunktion als Stammfunktion** der Funktion: x 🡪 1/x .

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler* * erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme)*(Lösen)*
* führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*
* variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)*

***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* * verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen… grafischen Messen von Steigungen
* entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
* nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
 | Die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion werden kurz wiederholend zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Eulersche Zahl kann z. B. über das Problem der stetigen Verzinsung. eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert.Die Frage nach der Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet.Umgekehrt wird zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle gesucht. Dazu kann man eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die immer weiter verfeinert wird. Oder man experimentiert in der Grafik des GTR, indem Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion gelegt werden. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich automatisch, dass für die Eulersche Zahl als Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen. Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden.Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen. |

|  |
| --- |
| **Thema VI: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem **begrenzten Wachstum**
* bestimmen Integrale […] auch mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen
* ermitteln den **Gesamtbestand** oder **Gesamteffekt** einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*
 | Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht.An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen.Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik können aufgegriffen werden (z. B. Gaußsche Glockenkurve). |

|  |
| --- |
| ***Thema VII: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden im Raum*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * stellen **Geraden in Parameterform** dar
* interpretieren den **Parameter** von Geradengleichungen im **Sachkontext**
* stellen **geradlinig begrenzte Punktmengen** in Parameterform dar

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
* verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und  Geraden… Darstellen von Objekten im Raum
 | Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit mittels einer Funktion zu variieren, z. B. zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden.Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann.  |

|  |
| --- |
| **Thema VIII: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen*** |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * deuten das **Skalarprodukt geometrisch** und berechnen es
* untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (**Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung**)
* bestimmen **Abstände zwischen Punkten und Geraden** [...]

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
* analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*
 | Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z. B. Division durch einen Vektor) gestellt.Anknüpfend an die EF werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z. B. Nachweis von Viereckstypen) an. Ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt kann im Einzelfall dahinterliegende Sätze transparent machen wie z. B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)⋅\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$ und $\left(\vec{a}\right)^{2}=\left(\vec{b}\right)^{2}$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms.In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.  |

|  |
| --- |
| **Thema IX:** *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter*  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * stellen **lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise** dar
* stellen Ebenen in **Koordinaten- und in Parameterform** dar
* deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es
* stellen Ebenen in **Normalenform** dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
* bestimmen **Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen**

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Argumentieren****Die Schülerinnen und Schüler** stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)*
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

***Kommunizieren****Die Schülerinnen und Schüler** erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)*
* formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
 | Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an Q-LK-G2 anknüpfender Weg vorgeschlagen:Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u}⋅\left(\vec{x}-\vec{a}\right)=0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ( $\vec{a} = 0$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet.Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen wird eine räumliche Geometriesoftware verwendet.Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema der EF wieder aufgegriffen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. So können auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden. Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt. |

|  |
| --- |
| **Thema X:** *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme – Untersuchungen an Polyedern* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
* untersuchen **Lagebeziehungen zwischen Geraden** […]
* berechnen **Schnittpunkte** von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
* bestimmen **Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen**
* beschreiben den **Gauß-Algorithmus** als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme(auch ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an)
* interpretieren die **Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen**
* stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar
* untersuchen **Lagebeziehungen** […] zwischen Geraden und Ebenen
* berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im **Sachkontext**
* untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (**Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung**)

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Argumentieren****Die Schülerinnen und Schüler** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)*
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
* berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hin­reichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)*
* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

***Kommunizieren****Die Schülerinnen und Schüler** erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)*
* verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)*
* wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
* erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*
* vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (*Diskutieren*)

***Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
* analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)*
* wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*
* beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen… Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen
 | Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen. Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema VII wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an. Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen.In der Rückschau sollten die Schüler nun einen Algorithmus entwickeln, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden. Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst solche Darstellungen entwickeln, auf Lernplakaten dokumentieren, präsentieren, vergleichen und in ihrer Brauchbarkeit beurteilen. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollten nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden.Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden.. Auch hier wird eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema VIII direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von Punkten zu Geraden VIII und zu Ebenen IX ermöglichen es z. B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Abgesehen von der Abstandsberechnung zwischen Geraden (erst in X) müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden.Das Gauß-Verfahren soll anknüpfend an das Thema II im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft werden. Weiter bietet der Einsatz des GTR Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden.In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben. |

|  |
| --- |
| **Thema XI:** *Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * stellen **Geraden in Parameterform** dar
* stellen **Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform** dar
* stellen **geradlinig begrenzte Punktmengen** in Parameterform dar
* untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und zwischen Geraden und Ebenen
* berechnen **Schnittpunkte** von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im **Sachkontext**
* untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (**Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung**)
* stellen Ebenen in **Normalenform** dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
* bestimmen **Abstände** zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

***Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen)*
* führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*
* vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*
* beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*
* analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)*
* variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)*
 | *Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.* Deshalb beschließt die Fachkonferenz, Problemlösungen mit den prozessbezogenen Zielen zu verbinden, 1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen.Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug des GTR zurückgreifen, jedoch steht dieser Teil der Lösung hier eher im Hintergrund und soll sogar bei aufwändigeren Problemen bewusst ausgeklammert werden. Bei Beweisaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und ggf. selbst vornehmen. Dabei spielt auch die Entdeckung einer Gesetzmäßigkeit – ggf. mit Hilfe von DGS – eine Rolle. Geeignete Beispiele bieten der Satz von Varignon oder der Sehnen-(Tangenten-) satz von Euklid.Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar zur Abiturvorbereitung überleitet bzw. zum Zweck der Abiturvorbereitung noch einmal wiederaufgenommen werden soll. |

|  |
| --- |
| **Thema XII:** *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * untersuchen **Lage- und Streumaße** von Stichproben
* erläutern den Begriff der **Zufallsgröße** an geeigneten Beispielen
* bestimmen den **Erwartungswert µ und die Standardabweichung σ** von Zufallsgrößen und treffen damit **prognostische Aussagen**

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
 | Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt.Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert.Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt.Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. |

|  |
| --- |
| **Thema XIII:** *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen und Modellieren mit der Binomialverteilung* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * verwenden **Bernoulliketten** zur Beschreibung entsprechender Zufalls­experimente
* erklären die **Binomialverteilung** einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der **Binomialkoeffizienten** und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten
* beschreiben den **Einfluss der Parameter n und p** auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
* bestimmen den **Erwartungswert µ und die Standardabweichung σ** von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen
* nutzen die **σ-Regeln für prognostische Aussagen**
* nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur **Lösung von Problemstellungen**

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler* * treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler** nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Generieren von Zufallszahlen… Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufalls- größen… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen

… Variieren der Parameter von Binomialverteilungen… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen… Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwatungs- wert, Standardabweichung)… Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten  Zufallsgrößen***Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler** analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
* wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
* erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)*
* interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)*
 | Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und der Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).*Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden:In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $σ=\sqrt{n⋅p⋅\left(1-p\right)}$ .Das Konzept der -Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren. |

|  |
| --- |
| **Thema XIV:** *Ist die Glocke Normal?* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * unterscheiden **diskrete und stetige Zufallsgrößen** und deuten die **Verteilungsfunktion als Integralfunktion**
* untersuchen stochastische Situationen, die zu **annähernd normalverteilten Zufallsgrößen** führen
* beschreiben den **Einfluss der Parameter µ und σ auf die Normalverteilung** und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (**Gaußsche Glockenkurve**)

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler* * erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
* reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

***Problemlösen****Die Schülerinnen und Schüler* * erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
* entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
* wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)*

***Werkzeuge nutzen****Die Schülerinnen und Schüler* * verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… Generieren von Zufallszahlen… Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufalls- größen
* nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
* entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen
* reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge
 | Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend beschließt die Fachkonferenz den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen.Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. *Ergänzung für leistungsfähige Kurse:* Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit.Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern µ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang.Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. III). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann. |

|  |
| --- |
| **Thema XI:** *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen* |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * interpretieren (ein- und zweiseitige) **Hypothesentests** bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse
* beschreiben und beurteilen **Fehler 1. und 2. Art**

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler* * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

***Kommunizieren****Die Schülerinnen und Schüler* * erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)*
* formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
* führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*
 | Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten.Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden, sie wird abschließend in einem ‚Testturm’ visualisiert. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert:* Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage?
* Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie?

Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet. |

|  |
| --- |
| **Thema XV:** *Von Übergängen und Prozessen*  |
| **Zu entwickelnde Kompetenzen** | **Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen** |
| **Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schülerinnen und Schüler* * beschreiben **stochastische Prozesse** mithilfe von **Zustandsvektoren** und **stochastischen Übergangsmatrizen**
* verwenden die **Matrizenmultiplikation** zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage **nachfolgender Zustände**, numerisches Bestimmen sich **stabilisierender Zustände,** Bestimmung **vorhergehender Zustände**)

**Prozessbezogene Kompetenzen:*****Modellieren****Die Schülerinnen und Schüler* * erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
* übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
* erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
* beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

***Argumentieren****Die Schülerinnen und Schüler* * präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
* nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*
* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*
 | *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.*Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln.Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt. |